

## **РЕЦЕНЗІЯ**

кандидата фізико-математичних наук

Болдарєвої Ольги Миколаївни

на дисертацію Дудко Анастасії Ігорівни

«Скінченновимірні спектральні задачі на графах»,

представлену на здобуття наукового ступеня доктора філософії

з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю

111 «Математика».

### **Актуальність теми дисертаційного дослідження**

Обернені задачі у фізиці відіграють дуже важливу роль, дозволяючи знаходити фізичні характеристики об'єкта не змінюючи його. Наприклад, знаходити форму об'єкта за спектром випромінюваних ним хвиль. Однією з найпростіших коливальних систем є так звана стільтьєсівська струна. Класична обернена задача для такої струни, тобто задача відновлення величин зосереджених мас та інтервалів між ними, виходячи з відомих спектрів задач Діріхле та Неймана і повної довжини струни, розв'язана М.Г. Крейном. Однак, цілком виправданим з точки зору можливих застосувань є розгляд задач, пов'язаних з описом коливань сіток або графів, ребрами яких є стільтьєсівські струни. Крім того, ті самі, з точки зору математики, рівняння виникають в задачах синтезу електричних ланцюгів (метод Кауера). Хоча роботи на цю тему з'являються, в цілому, ця область вивчена не достатньо.

### **Степінь обґрунтованості наукових положень та висновків**

Слід зазначити, що у вступі обґрунтовується актуальність обраної теми, описаний зв'язок з науковими програмами, темами, сформульовано мету і визначено основні методи дослідження, визначені об'єкт і предмет дослідження. Обґрунтована наукова новизна роботи і теоретичне значення отриманих результатів, а також коротко викладено зміст роботи.

У першому розділі дисертаційної роботи наведена коротка історія прямих та обернених спектральних задач на інтервалі, на зірковому графі та

на довільному дереві. Дані означення таких понять, як ланцюговий дріб Стільтьєса, ланцюговий дріб, що розгалужується, тлумачиться фізичний зміст крайових умов Неймана, Діріхле та умови балансу сил у внутрішній вершині графа. Наведені означення неванліннівської функції (це необхідно, бо існують суттєво різні означення неванліннівської функції),  $S$  – функції,  $S_0$  – функції. Також наведені деякі відомі леми та теореми, котрі потрібні далі.

У другому розділі дисертації наведені відомі динамічні рівняння, які виникають у початково-крайовій задачі, що описує малі поперечні коливання стільтьєсівської струни, а також рівняння для амплітудних векторів, котрі виникають після розділення змінних. Наведені відповідні системи рекурентних співвідношень другого порядку, які виникають при розв'язанні цих рівнянь. Розглянута спектральна задача опису спектра стільтьєсівської струни з вільними кінцями (умови Неймана), а також задачі для частин цієї струни з умовами Неймана на одному кінці і умовами Діріхле на другому. Цю задачу можна тлумачити як задачу на графі  $P_3$ . Розв'язана відповідна обернена задача, тобто задача відновлення величин точкових мас та довжин інтервалів між ними виходячи зі спектра задачі Неймана для всієї струни та спектрів двох задач для частин струни: з умовою Неймана на лівому кінці і умовою Діріхле на правому – одна, та з умовою Неймана на правому кінці і умовою Діріхле на лівому - друга.

У третьому розділі розглянуті :

- спектральна задача для зіркового графу з трьох стільтьєсівських струн з умовами Діріхле на висячих вершинах,
- спектральна задача для одного з ребер з умовою Діріхле на лівому кінці та умовою Неймана на правому кінці,
- спектральна задача для об'єднання другої та третьої струн з умовами Діріхле на обох кінцях.

Описане чергування власних значень першої задачі з елементами об'єднанням множин власних значень другої та третьої задач. Розв'язана також відповідна обернена задача, тобто знайдені умови на три послідовності

чисел, необхідні та достатні для того, щоб вони були спектрами цих трьох задач.

У четвертому розділі дисертації розглянуті пряма та обернена спектральні задачі на зіркового графу з  $q$  ребрами, які є стільтьєсівськими струнами з заданими кількостями намистин на ребрах. В якості кореня обрана одна з всячих вершин. Для відновлення величин точкових мас та інтервалів між ними використані два спектри: спектр задачі з умовою Неймана у корені та задачі з умовою Діріхле у корені. Доведено, що власні значення цих задач чергуються у нестрогому сенсі, а також знайдений мажоруючий вектор для спільних упорядкованого вектора кратностей спільних власних значень цих задач. Знайдені умови умови на дві числові послідовності, необхідні та достатні щоб вони були спектрами таких задач.

У п'ятому розділі дисертації розглянута обернена задача на дереві, ребрами якого є стільтьєсівські струни. Використаний метод розвинення відношення характеристичних функцій задач Діріхле та Неймана у ланцюговий дріб, що розгалужується. Виявилось, що цей метод можна застосовувати і у випадку, коли у деяких внутрішніх вершинах дерева знаходяться точкові маси.

У шостому розділі дисертації розглянуті малі поперечні коливання напівправильного (Архімедова) многогранника - усіченого ікосаедра, з якого є однаковими стільтьєсівськими струнами, симетричними відносно середини, в якості ребер. Спектральна задача отримана накладанням умов неперервності та балансу сил у вершинах. Показано, що якщо всі ребра однакові і симетричні, то задачу можна звести до спектральної задачі для нормованого лапласіана графа. Вивчене питання кратностей власних значень.

### **Наукова новизна одержаних результатів**

Обернена задача за трьома спектрами, що пов'язана з описом малих коливань стільтьєсівської струни розглядалася лише за крайових умов Діріхле на кінцях струни. Обернена задача за трьома спектрами з умовами

Неймана на кінцях струни раніше не розглядалась. Таким чином, цей результат є новим.

Постановка оберненої задачі з заданими кількостями зосереджених мас на ребрах зіркового графу є принципово новою.

Задача про коливання дерева розглядалася раніше за умови відсутності зосереджених мас у внутрішніх вершинах дерева. Можливість наявності зосереджених мас у внутрішніх вершинах дерева призвела до цілком нової ситуації.

Задача про коливання усіченого многогранника (котрий є циклічно зв'язним графом) взагалі не розглядалася раніше.

#### **Повнота викладу результатів дослідження в опублікованих працях**

Основні положення та висновки роботи опубліковані А. І. Дудко у 5 публікаціях, серед яких 1 стаття у фаховому виданні України, 4 публікації у виданнях, які індексуються в наукометричній бази Scopus. Апробація результатів дисертаційного дослідження проводилася на трьох наукових міжнародних конференціях та на міжнародному науковому семінарі «Quantum Graphs and Related Topics».

#### **Практичне значення результатів дослідження**

Результати дисертації мають науково-теоретичне та практичне значення, та можуть бути використані у науково-дослідній діяльності для подальшого вивчення порушеної проблематики.

Результати дисертаційного дослідження можуть бути використані у теорії синтезу електричних ланцюгів, узагальнені у теорії квантових графів, а також становлять інтерес у галузі математичної фізики, теорії диференціальних та різницевих рівнянь, теорії рекурентних співвідношень, теорії зважених графів. Також вони можуть бути використані у викладацькій роботі зі студентами магістратури.

### Дискусійні питання та зауваження

Оцінюючи, в цілому, позитивно теоретичні та практичні результати дослідження А. І. Дудко, маю висловити деякі зауваження та побажання:

1. На рис. 2.2 точка Р позначена так, що можна подумати, що в ній є точкова маса, хоча насправді судячи з тексту її там нема.
2. Викликає сумніви необхідність умов 2) та 3) в теоремі 3.3. Можливо, вони виконуються автоматично.
3. В анотації дисертації було б доцільним представити наукову новизну дослідження.
4. У дисертації присутні деякі мовні та стилістичні огріхи.

### Загальний висновок.

Дисертація «Скінченновимірні спектральні задачі на графах» є завершеною, самостійною науковою роботою, яка містить нові обґрунтовані результати та виконана на належному теоретичному рівні. Структура та обсяг дисертації відповідає встановленим вимогам. Зміст дисертації відповідає поставленій меті і завданням, які повністю вирішено в процесі дослідження.

З аналізу тексту дисертації офіційним опонентом вбачається дотримання здобувачем вимог академічної доброчесності в повному обсязі.

Дисертаційна робота А. І. Дудко відповідає чинним вимогам п. п. 6, 7, 8, 11 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженому Постановою Кабінету Міністрів України від 14 січня 2022 року № 44, а її автор А. І. Дудко заслуговує на присудження ступеня доктора філософії зі спеціальності 111 «Математика».

### Рецензент

кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри вищої математики і статистики

Ольга БОТЛАРСЬВА

