

ВІДГУК

офіційного опонента

на дисертацію Дудко Анастасії Ігорівни

«Скінченновимірні спектральні задачі на графах»,

представлену на здобуття наукового ступеня доктора філософії

з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111

«Математика».

Актуальність теми дисертаційного дослідження

Задачі коливання струни досліджувались в роботах Ейлера, Даламбера, Лагранжа, Гельмгольца, Релея та інших. При дослідженні фізичних явищ важливу роль відіграє побудова адекватних простих математичних моделей. Для опису коливань невагомої пружної нитки, що несе на собі точкові маси, видатний український математик М. Г. Крейн свого часу запропонував модель, котру він назвав стілтєсївскою струною. У його спільній монографії з Ф. Гантмахером було розв'язано пряму та обернену задачі, котрі виникають при розгляді поперечних коливань такої струни. Але існують фізичні об'єкти, які можна моделювати не як одну струну, а як сітку або граф із тонких струн. Це показує, що спектральні задачі на графах (а спектр – це множина частот коливань) є важливими для фізики і дають змогу зробити висновки відносно форми графу, інших параметрів (величин зосереджених мас та інтервалів між ними), виходячи з відомих спектрів коливань. Отже, тема дисертації є актуальною не тільки для математики, але також і для фізики. Крім того, в дисертації розглядається питання кратностей власних значень, котре ще не є до кінця розв'язаним навіть для графів, що є деревами.

Степінь обґрунтованості наукових положень та висновків.

Висока степінь обґрунтованості та достовірності наукових положень, теоретичних висновків та результатів дослідження підтверджується глибиною методологічної, теоретичної бази, її прикладним характером.

У вступі обґрунтовується актуальність обраної теми, описаний зв'язок з науковими програмами, темами, сформульовано мету і визначено основні

методи дослідження, визначено об'єкт і предмет дослідження, наукова новизна роботи і теоретичне значення отриманих результатів, коротко викладено зміст роботи.

У першому розділі дисертаційної роботи наведена коротка історія скінченновимірних обернених задач на інтервалі, на зірковому графі та на довільному дереві. Розглянуто такі необхідні далі поняття, як ланцюговий дріб Стілтєса, наведено означення неванліннівської функції, S – функції, S_0 – функції. Також наведено деякі відомі леми та теореми, котрі використовуються при доведенні основних теорем у подальших розділах.

У другому розділі дисертаційної роботи наведено відомі динамічні рівняння, які виникають при описі малих поперечних коливань стілтєсівської струни, а також рівняння, котрі виникають після розділення змінних. Наведено відповідні системи рекурентних співвідношень, які виникають при розв'язанні цих рівнянь.

Розглянуто пряму задачу опису спектру стілтєсівської струни з вільними кінцями у порівнянні зі спектрами відповідних задач для частин цієї струни. Потім розглянуто відповідну обернену задачу, тобто задачу відновлення мас намистин та довжин інтервалів між ними виходячи зі спектру задачі для всієї струни та спектрів задач для її частин.

У третьому розділі розглянуто спектральну задачу за трьома спектрами для зіркового графу з трьох стілтєсівських струн. Йдеться про спектр задачі на всьому графі, спектр задачі на одному ребрі і на об'єднанні другої і третьої струн. Описано чергування власних значень першої задачі з елементами об'єднання множин власних значень другої та третьої задачі. Розв'язано також обернену задачу, тобто знайдено умови на три послідовності чисел, необхідні та достатні для того, щоб вони були спектрами цих трьох задач.

У четвертому розділі дисертаційної роботи розглянуто обернену спектральну задачу для зіркового графу з q ребрами зі стілтєсівських струн з заданими кількостями намистин на ребрах. Для відновлення величин точкових

мас та інтервалів між ними використані два спектри: спектр задачі з умовою Неймана у корені (одній з висячих вершин) та задачі з умовою Діріхле у цій вершині. Знайдено необхідні і достатні умови на дві числові послідовності, щоб вони були спектрами таких задач.

У п'ятому розділі дисертаційної роботи розглянуто обернену задачу для дерева, яке складається зі стілтєсівських струн. Показано, що метод розвинення відношення характеристичних функцій задач Діріхле та Неймана у ланцюговий дріб можна застосовувати і у випадку, коли точкові маси знаходяться також і у внутрішніх вершинах графа.

У шостому розділі дисертаційної роботи розглянуті малі поперечні коливання усіченого ікосаедра (або, так званого, фулеріна), ребрами якого є однакові стілтєсівські струни симетричні відносно середини ребра. Спектральну задачу отримано накладанням умов неперервності та балансу сил у вершинах. Показано, що якщо всі ребра однакові, то завдяки симетрії задачі виникають кратні власні значення. Показано, що максимальна кратність такого власного значення становить 32 , що є максимальним можливим для циклічно зв'язного графу, тобто $\mu + 1$, де μ – це цикломатичне число графу.

Наукова новизна одержаних результатів. Обернена задача за трьома спектрами, породжена скінченно-різницевиими рівняннями стілтєсівської струни розглядалася раніше за інших крайових умов (за умов Діріхле на кінцях повного інтервалу). Обернена задача за трьома спектрами з умовами Неймана на кінцях усього інтервалу не розглядалася ані для стілтєсівської струни, ані для рівняння Штурма-Ліувілля. Таким чином, цей результат є новим.

Задача, яка досліджена в розділі 4, розглядалася раніше без обмежень на кількість зосереджених мас на ребрах графу. Отже, постановка такої задачі з заданими кількостями зосереджених мас на ребрах графу є принципово новою. Розв'язана в дисертації задача про коливання дерева зі струн Стілтєса відрізняється від розглянутих раніше тим, що допускає наявність зосереджених мас у внутрішніх вершинах дерева. Задачу розділу 5 про коливання усіченого ікосаедра розглянуто вперше.

Повнота викладу результатів дослідження в опублікованих працях

Основні теоретичні положення та висновки роботи опубліковані автором у 5 публікаціях, серед яких 1 стаття у фаховому виданні України, 4 публікації у виданнях, що входять до наукометричної бази Scopus. Апробація результатів дисертаційного дослідження проводилася на трьох наукових міжнародних конференціях та на міжнародному науковому семінарі.

Практичне значення результатів дослідження

Концептуальні пропозиції і висновки дисертації мають науково-теоретичне та практичне значення, та можуть бути використані у науково-дослідній діяльності для подальшого вивчення порушеної проблематики.

Зокрема, результати дисертаційного дослідження можуть бути використані у теорії синтезу електричних ланцюгів, а також становлять інтерес у галузі математичної фізики, теорії диференціальних та різницевих рівнянь, теорії рекурентних співвідношень, теорії зважених графів.

Дискусійні питання та зауваження. Позитивно оцінюючи, в цілому, досягнуті А. І. Дудко теоретичні та практичні результати дослідження, вважаємо за необхідне висловити деякі зауваження та побажання:

1. Слід було б навести більше прикладів до теорем 3.3 та 4.5. Наприклад, з'ясувати, якими будуть результати, якщо всі точкові маси однакові.
2. Умови 2) та 3) Теореми 3.3 виглядають штучними. Слід було б перевірити, чи не є вони наслідком умови 1). В разі, якщо – ні, навести приклад, де вони не виконуються і задача не має розв'язку (в тому сенсі, що не всі значення точкових мас і інтервалів між ними є додатними).
3. Умови Теореми 4.10 дуже громіздкі. Було б цікаво дослідити наскільки вони спрощуються, якщо вважати, що спектри задач Неймана і Діріхле не перетинаються.

Загальний висновок.

Дисертаційна робота на тему «Скінченновимірні спектральні задачі на графах», є цільним, завершеним, самостійним науковим дослідженням, що виконане на належному теоретичному рівні. Структура та обсяг дисертації відповідає встановленим вимогам. Зміст дисертації відповідає поставленій меті і завданням, які повністю вирішено в процесі дослідження. Основні положення роботи, винесені на захист, мають елементи наукової новизни. Авторка виявила високий рівень аналізу літератури з проблеми дослідження. У тексті не виявлено ознак плагіату, самоплагіату, фальсифікації.

Дисертаційна робота А. І. Дудко відповідає чинним вимогам п. п. 6, 7, 8, 11 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженому Постановою Кабінету Міністрів України від 14 січня 2022 року № 44, а її автор А. І. Дудко заслуговує на присудження ступеня доктора філософії зі спеціальності 111 «Математика».

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук,
провідний науковий співробітник
науково-дослідної частини
Донецького національного
університету імені Василя Стуса



Володимир ДЕРКАЧ

