Відгук

на дисертаційну роботу Дудко Анастасії Ігорівни «Скінченновимірні спектральні задачі на графах», висунуту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111-«Математика».

Одною із важливих задач математичної фізики є задача опису коливань різних систем, простішою з яких є струна. Існує декілька математичних моделей струн серед яких важливою є модель М.Г.Крейна . М.Г. Крейн запровадив модель, назвавши її стільтьєсівською струною, назву якої він пояснив тим, що у своїх дослідженнях на цю тему він використовував результати Стільтьєса. Стільтьєсівською струною він назвав невагому пружну нитку, що несе на собі точкові маси, котрі він називав ще намистинами. У своїх роботах М.Г. Крейн припускав можливість нескінченої кількості намистин. До тої ж самої, з точки зору математики, моделі зводиться задача про поперечні коливання точкових мас , з*єднаних пружинами.

Традиційно у спектральній теорії крайових задач має сенс розглядати пряму задачу, тобто опис спектру, що складається з власних значень, а також обернену задачу, тобто задачу відновлення параметрів струни, виходячи з відомих спектрів крайових задач, що нею породжені. Слід зазначити, що пряма та обернена задачі для стільтьєсівської струни зі скінченною кількістю намистин, були повністю розв*язані у монографії Гантмахера і Крейна. Зокрема, цими авторами було показано, що для відновлення параметрів стільтьєсівської струни, тобто для знаходження мас намистин та довжин інтервалів між ними, знання одного спектра крайової задачі не є достатнім, а потрібне знання двох спектрів та загальної довжини струни.

Дисертація присвячена задачам, що описують малі поперечні коливання графів, ребрами яких є стільтьєсівські струни. Слід зазначити, що мабуть першою роботою на тему коливань дерев зі стільтьєсівських струн є робота Genin J. Mechanical vibrations trees / J. Genin, J. S. Maybee // J. Math. Anal. Appl. — Vol. 45. — 1974. — P.746—763 . У монографії Гантмахер Ф. Р. Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. — [2 изд.]. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 359 с., обернена задача на інтервалі полягала в наступному.

Відомі : 1) спектр задачі Діріхле-Діріхле, тобто задачі, породженої рекурентними співвідношеннями стільтьєсівської струни з умовами Діріхле на обох кінцях (з точки зору фізики це відповідає закріпленню кінців струни);

2) спектр задачі Неймана-Діріхле, тобто спектр задачі з умовою Неймана на одному кінці та умовою Діріхле на іншому кінці (з точки зору фізики умова Неймана означає, що відповідний кінець струни може вільно рухатись у напрямку, перпендикулярному до положення рівноваги струни);

3) загальна довжина струни. Треба знайти маси намистин та довжини інтервалів між ними. Ця задача у монографії Гантмахера та Крейна була розв*язана повністю,тобто:

а) знайдені умови на дві послідовності чисел, необхідні та достатні, щоб вони були спектрами задач Діріхле-Діріхле (перша) та Неймана-Діріхле (друга);

б) доведена єдиність розв*язку;

c) запропонований метод знаходження шуканих мас намистин та довжин інтервалів між ними. Показано, що для відновлення параметрів стільтьєсівської струни тобто для знаходження мас намистин та довжин інтервалів між ними, знання одного спектра крайової задачі не є достатнім, а потрібне знання двох спектрів та загальної довжини струни.

На жаль, навіть у випадку зіркового графу розв*язок не є єдиним .

Актуальність теми.

Запроваджене М. Г. Крейном поняття стільтьєсівської струни — це найпростіша модель фізичних об*єктів, що коливаються. Попри простоту, ця модель має таку перевагу, що в ній пряма та обернена задача були розв*язані повністю, причому розв*язання є вельми простим, знайдені необхідні і достатні умови існування розв*язку і ці умови легко перевірити. На відміну від цієї моделі, у моделі, в якій струна є гладкою (її щільність є двічі неперервно диференційованою), розв*язок був знайдений у роботах В.О.Марченка , І.М.Гельфанда таБ.М. Левітана , М. Г. Крейна , але метод відновлення щільності струни виявився дуже складним. В той же час важливий фізичний зміст мають задачі, де розглядається не одна струна, а граф, утворений зі струн. Також рівняння коливань графу зі стільтьєсівських струн зустрічається у теорії синтезу електричних ланцюгів . У зв'язку з цим робота є актуальною.

Зв*язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Тема дисертації затверджена вченою радою Державного закладу « Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського » (протокол № 2 від «30» червня 2018 року). Дисертаційне дослідження виконано відповідно до плану науково- дослідної роботи кафедри вищої математики і статистики фізико- математичного факультету Державного закладу « Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського » та здійснено в межах науково-дослідної роботи за темами

1. « Скінченновимірна та нескінченновимірна теорія операторів та операторних в*язок на графах », з 2018 р. по теперешній час,державний реєстраційний номер 01119U002030;

2. « Скінченновимірні та нескінченновимірні демпфовані системи » (2018 р., державний реєстраційний номер 0114U000006).

Об*єкт дослідження — прямі та обернені спектральні задачі для графів зі стільтьєсівських струн.

Предмет дослідження — розв*язання прямих та обернених задач для графу зі стільтьєсівських струн з умовами Діріхле та Неймана на висячих вершинах і умовами неперервності та балансу сил у внутрішніх вершинах.

Мета і завдання дослідження.

Реалізація поставленої мети передбачає вирішення таких завдань:

1. Розв*язання прямої задачі, тобто описання спектру коливань стільтьєсівської струни з вільними кінцями (умова Неймана на обох кінцях) та спектру коливань цієї ж струни з закріпленою проміжною точкою(умова Діріхле).

2. Розв*язання оберненої задачі, тобто задачі відновлення даних стільтьєсівської струни за відомими:

- спектром коливань цієї струни з вільними кінцями (умова Неймана);

- спектром коливань лівої частини цієї струни з одним вільним, а другим - закріпленим;

- спектром коливань правої частини з одним вільним, а іншим закріпленим кінцем.

3. Опис спектру коливань зіркового графу, що складається з трьох стільтьєсівських струн і порівняння цього спектру зі спектрами задач на одному ребрі та на об*єднанні двох інших ребер.

4. Розв*язання оберненої задачі відновлення даних зіркового графу, який складається з трьох стільтьєсівських струн за трьома спектрами, перший з яких — це спектр задачі на усьому графі, другий — це спектр задачі на першому ребрі, а третій — це спектр задачі на об*єднанні другого і третього ребра.

5. Розв*язання оберненої спектральної задачі для зіркового графу зі стільтьєсівських струн з заданою кількістю точкових мас на ребрах. Знаходження умов на дві послідовності дійсних чисел, необхідних та достатніх для того, щоб ці послідовності були спектрами задач Діріхле та Неймана на зірковому графі із заданою кількістю намистин на ребрах.

6. Опис спектру задачі для дерева, яке складається зі стільтьєсівських струн. Розклад дробу, чисельник якого є характеристичним многочленом задачі Діріхле для дерева, а знаменник є характеристичним многочленом задачі Неймана для цього ж дерева у ланцюговий дріб, що розгалуджується.

7. Розв*язання оберненої задачі для дерева, яке складається зі стільтьєсівських струн.

8. Опис коливань усіченого ікосаедра, ребрами якого є однакові стільтьєсівські струни. Знаходження спектру в задачі про поперечні коливання усіченого ікосаедра, ребрами якого є однакові стільтьєсівські струни.

Методи дослідження.

В дисертаційному дослідженні використовується теорія ланцюгових дробів Т. І. Стільтьєса, розклад раціональних -функцій у скінченний ланцюговий дріб М. Г. Крейна, а також у ланцюговий дріб, що розгалуджується.

Наукова новизна одержаних результатів.

Усі одержані наукові результати є новими.Хоча задача за трьома спектрами для стільтьєсівської струни вже розглядалася, але там крайові умови були умовами Діріхле, що значно спрощувало ситуацію порівнено до задачі, розв'язаної у розділі 2 дисертації. Задачі, аналогічно тій, що становить розділ 3 дисертації, взагалі не розглядалися для стільтьєсівських струн. Задачі, аналогічні тій, що становить розділ 4, розглядалися раніше, але без обмежень на кількість намистин на ребрах. У постановці розділу 4 ця задача раніше не розглядалась. Задача розділу 5 відрізняється від попередніх задач на цю тему тим, що в ній допускається наявність намистин у внутрішніх вершинах. Задача розділу 6 раніше не розглядалась.

Практичне значення одержаних результатів.

Ця дисертаційна робота має теоретичний характер, тому її результати становлять інтерес для математичної фізики, теорії диференціальних і різницевих рівняннях та їх застосувань. Також ці результати можуть бути використані в теорії синтезу електричних ланцюгів.

Особистий внесок здобувача.

Усі результати, що виносяться на захист,отримані здобувачем самостійно. Постановка задач та загальне керівництво роботою належить науковому керівнику В.М. Пивоварчику.

Апробація результатів дисертації.

Основні положення, висновки і результати дисертаційного дослідження обговорювалися на семінарах та доповідалися на міжнародних конференціях:

1. International scientific conference, « Algebraic and geometric methods of analysis », Odessa, May 30 — June 4, 2018.
2. « 3d International Conference on Computer Algebra and Information Technologies », Odessa I.I. Mechnikov National University, Odessa, August 20 — 25, 2018.
3. International scientific conference , « Algebraic and geometric methods of analysis », Odessa, May 26 — 30, 2020.

Публікації.

Основні положення дисертаційного дослідження викладені у 5 наукових працях, з яких 1 належить до переліку фахових наукових видань (див. [3]), 4 статті опубліковані у журналах, які індексуються у наукометричних базах даних Scopus (див. [1], [2], [4], [5], [6]).

Структура і обсяг дисертації.

Дисертація складається зі вступу, шести розділів, висновків до кожного розділу і загальних висновків, списку використаних джерел. Загальний обсяг тексту дисертації – 124 с.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність обраної теми, описаний зв'язок з науковими програмами, планами, темами, сформульовано мету і визначено основні задачі та методи дослідження, визначені об'єкт і предмет дослідження, наукова новизна роботи і теоретичне значення отриманих результатів, коротко викладено зміст основної частини роботи.

У першому розділі дисертаційної роботи наведена коротка історія скінченновимірних обернених задач на інтервалі, на зірковому графі та на довільному дереві. Розглянуті такі необхідні далі поняття, як ланцюговий дріб Стільтьєса, наведені означення неванліннівської функції, – функції, – функції. Також наведені деякі відомі леми та теореми, котрі використовуються при доведенні основних теорем у подальших розділах.

У другому розділі дисертаційної роботи наведені відомі динамічні рівняння, які виникають при описі малих поперечних коливань стільтьєсівської струни, а також рівняння, котрі виникають після розділення змінних. Наведені відповідні системи рекурентних співвідношень, які виникають при розв'язанні цих рівнянь. Далі розглянуті три спектральні задачі: Діріхле, Неймана, та Діріхле – Неймана. Основним результатом цього розділу слід вважати теорему 2.5. в якій встановлено що за двома спектрами які чергуються між собою відновлюється маси та інтервали струни.

У третьому розділі розглянута спектральна задача за трьома спектрами для зіркового графу зі стільтьєсівських струн. Розглядаються спектри трьох задач. Основний результат для прямої задачі міститься в теоремі 3.1 де дпно опис властивостей спектральних даних. В цьому розділі розглянута відповідна обернена задача. Теорема 3.3. в якій доведено ,що якщо три додатних числа та три послідовності додатних чисел , котрі задовольняють певним умовам, то існують маси та інтервали що крайова задача для зіркового графа має у якості спектра ці послідовності.

У четвертому розділі дисертаційної роботи розглянута обернена спектральна задача для зіркового графу зі стільтьєсівських струн з заданими кількостями намистин на ребрах. Розглянуто зірковий граф з ребрами. В якості кореня взято одну з висячих вершин. Головним результатом цього розділу слід вважати теорему 4.10. в якій отримані не тільки достатні, але й необхідні умови для того щоб певні послідовності утворювали спектральні данії для цієї задачі.

У п'ятому розділі дисертаційної роботи розглянута обернена задача для дерева, яке складається зі стільтьєсівських струн. Оберемо деяку вершину в якості кореня і будемо вважати, що всі ребра спрямовані від кореня. Тоді кожна вершина, яка не є коренем, має одне вхідне ребро.Розглядається метричне дерево з ребрами, що лежать в одній площині. Вивчаються задача Діріхле, задача Неймана. Основним результатом цього розділу є теорема-5.2 де отримано розв*язок оберненої задачі.

У шостому розділі дисертаційної роботи розглянуті малі поперечні коливання усіченого ікосаедра (або, так званого, фулеріна), ребрами якого є однакові стільтьєсівські струни симетричні відносно середини ребра (). Інтерес до усіченого ікосаедра виник несподівано знову у зв'язку з відкриттям хіміками третього стану агрегації вуглецю. Виявилося, що цей стан вуглецю відповідає молекулі, що складається з 60 атомів, які розташовані у вершинах усіченого ікосаедра (один ізнапівправильних або архімедових твердих тіл) і відповідає молекулі .Знайдені корені характеристичного многочлена графа ікосаедра. Показано, що максимальна кратність власного значення, тобто кореня характеристичного многочлена становить 32.

ВИСНОВКИ

Отримані в дисертації результати стосуються прямої і оберненої спектральних задач, породжених рекурентними співвідношеннями стільтьєсівських струн на областях, що є графами. Дисертаційна робота містить такі результати:

1. Розв*язана пряма задача, тобто описаний спектр коливань стільтьєсівської струни з вільними кінцями (умови Неймана на обох кінцях) та порівняні спектр відповідної спектральної задачі зі спектрами задач, що описують коливання цієї ж струни з вільними кінцями і фіксованою проміжною точкою. Доведено, що власні значення задачі з умовами Неймана на кінцях чергуються у нестрогому сенсі з об'єднанням спектрів двох задач, одна з яких породжена лівою частиною струни з умовою Неймана на лівому кінці та умовою Діріхле на правому, а друга породжена правою частиною струни з умовою Неймана на правому кінці та умовою Діріхле на лівому.

2. Розв*язана відповідна обернена задача, тобто задача відновлення даних стільтьєсівської струни за відомими: А) спектром коливань цієї струни з вільними кінцями (умова Неймана на обох кінцях); Б) спектром коливань лівої частини цієї струни з лівим кінцем вільним (умова Неймана), а правим – закріпленим (умова Діріхле); В) спектром коливань правої частини струни з правим вільним (умова Неймана), а лівим – закріпленим (умова Діріхле); Г) загальними масами на частинах струни.

3. Встановлений взаємозв'язок між спектром задачі на зірковому графі, який складається з трьох стільтьєсівських струн, спектром задачі на одному з ребер цього зіркового графу та спектром задачі на об'єднанні другого і третього ребер. Цей зв'язок полягає у нестрогому чергуванні власних значень цих трьох задач.

4. Розв*;язана обернена задача відновлення даних зіркового графу, який складається з трьох стільтьєсівських струн, за відомими загальними довжинами ребер та трьома спектрами: А) перший з яких – це спектр задачі на усьому графі; Б) другий – це спектр задачі на першому ребрі; В) третій – це спектр задачі на об'єднанні другого і третього ребра.

5. Для спектральної задачі на зірковому графі зі стільтьєсівських струн з умовами неперервності і балансу сил у центральній вершині, умовами Діріхле на всіх висячих вершинах, окрім кореня, розглянуті дві задачі: перша – з умовою Діріхле у корені, а друга – з умовою Неймана у корені (корінь – одна з висячих вершин). Описані спектри таких задач та їх взаємозв'язок. Розв'язано відповідну обернену задачу відновлення мас намистин і довжин інтервалів між ними, виходячи зі спектрів двох задач (Неймана та Діріхле) для випадку, коли кількості мас на ребрах задані. Знайдені умови на дві числові послідовності, необхідні і достатні для того, щоб вони були спектрами задач Діріхле та Неймана.

6. Розв'язана обернена задача для дерева, яке складається зі стільтьєсівських струн. Був розкладений дріб, чисельник якого є характеристичним многочленом задачі Діріхле на дереві, а знаменник є характеристичним многочленом задачі Неймана на цьому ж дереві у ланцюговий дріб, що розгалуджується. Це є узагальненням відомих результатів на випадок існування точкових мас у внутрішніх вершинах дерева.

7. Були описані коливання графу усіченого ікосаедра, ребрами якого є однакові стільтьєсівські струни. Спектральна задача отримана накладанням умов неперервності та балансу сил у вершинах. Показано, що якщо всі ребра однакові, то завдяки симетрії задачі виникають кратні власні значення. Максимальна кратність такого власного значення становить 32, що є максимальним можливим для циклічно зв'язного графу, тобто , де – це цикломатичне число графу.

По дисертації є одне зауваження, яке слід вважати скоріше як побажання для подальших досліджень. І воно полягає у слідуючому. Вивчення спектру самоспряженого оператору опирається на опис коренів характеристичної функції. Розташування цих нулів залежить від властивостей самої функції. Тому цікаво було би описати клас функцій які є характеристичними для цього класу операторів (спектральних задач).

Дисертація написана чітко, кожне твердження має ґрунтовне доведення. Публікації містять основні твердження дисертації. Рівень дисертації високий. Вважаю, що дисертація відповідає вимогам які пред*являються до дисертацій до наукового ступеня доктора філософії (111-Математика), а Дудко Анастасія Ігорівна заслуговує присудження ступеня доктора філософії за спеціальністю 111-Математика.

Провідний науковий співробітник

Фізико-Технічного Інституту Низких

Температур ім..Б.і.Вєркіна НАН України Золотарьов В.О.

Професор,доктор фіз.-мат.наук

Підпис Золотарьова В.О. засвідчую.
Заступник директора з наукової роботи
ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України
Долбин О.В./

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ІМ. Б.І.ВЄРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
УКРАЇНА, М.ХАРКІВ
Ідентифікаційний код 03534601