

**ВІДГУК**  
офіційного опонента  
на дисертацію Райлян Анастасії Андріївни  
«Обернена задача знаходження форми графу та узагальнення теореми  
Амбарцумяна»,  
представлену на здобуття наукового ступеня доктора філософії  
з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111  
«Математика».

**Актуальність теми дисертаційного дослідження**

Теорія обернених задач Штурма-Ліувілля бере свій початок зі статті В. А. Амбарцумяна, яка вийшла у 1929 році. Подальший розвиток теорії оберненої задачі Штурма-Ліувілля на інтервалі пов'язаний з іменами таких дослідників як G. Borg, V. Bargman, R. Newton, В. А. Марченко та ін. Містком, який з'єднав теорію оберненої задачі Штурма-Ліувілля на скінченному інтервалі з теорією обернених задач Штурма-Ліувілля на метричних графах, були роботи В. Simon, F. Gesztesy та В. М. Пивоварчика, присвячені задачам з трьома спектрами, які можна розглядати як задачі на метричному графі  $P_3$ . Далі теорія розвивалась у двох напрямках, а саме знаходження потенціалів на ребрах графа, виходячи зі спектрів крайових задач і знаходження форми графа, використовуючи або спектр (у випадку компактного графа), або дані розсіяння (у випадку некомпактного графа). Дисертаційна робота здебільшого відноситься до другого з цих напрямків.

В наш час теорія квантових графів бурхливо розвивається і має багато застосувань, наприклад, у дизайні квантових мікросхем, у дослідженні багатоатомних молекул. Також, ця теорія має багаті перспективи розвитку та застосувань в сучасному науковому просторі. На мій погляд, актуальність теми дисертації є безумовною.

## **Степінь обґрунтованості наукових положень та висновків.**

Доведення всіх основних результатів дисертаційної роботи А.А. Райлян приведені з достатньою повнотою, на прийнятому в сучасній математичній літературі рівні строгості і тому в їх обґрунтованості та достовірності не виникає сумніву. Дисертація написана чіткою і зрозумілою мовою, виклад логічний і послідовний.

Дисертаційна робота складається з анотації українською та англійською мовами, п'яти розділів, загальних висновків, списку використаної літератури.

У першому розділі дисертаційної роботи (вступі) авторка описує актуальність теми, розглядає можливі застосування теорії оберненої задачі знаходження форми графа та оберненої спектральної задачі знаходження потенціалів задач Штурма-Ліувілля на ребрах графа, наводить посилання на роботи (в тому числі такі, що опубліковані останнім часом), в яких є методи знаходження і приклади, так званих, коспектральних (ізоспектральних) графів. Наведений зв'язок з науковими програмами кафедри, в яких приймала участь авторка. З'ясовані мета, завдання і методи дослідження. Доведена наукова новизна одержаних результатів.

Другий розділ починається з історії теорії обернених спектральних задач Штурма-Ліувілля на інтервалі, що була ініційована теоремою Амбарцумяна. Розглянуті далі спектральна задача про три спектри та задача Хохштадта-Лібермана тлумачаться авторкою як задачі на графі, що має три вершини і два ребра.

Далі авторка переходить до задач на більш складних графах і наводить короткий опис проблеми коспектральності у квантовій теорії графів.

У третьому розділі розглянута задача за трьома спектрами, першою з яких є задача Штурма-Ліувілля на всьому інтервалі з умовою Неймана на лівому кінці і умовою Діріхле на правому, другою є задача, породжена рівнянням з тим самим потенціалом на лівій половині інтервалу з умовами Неймана на обох кінцях, третьою – задача з тим же потенціалом на правій половині з умовою Неймана на лівому кінці та умовою Діріхле на правому.

Доведено, що власні значення першою з трьох задач не строго чергуються з упорядкованими за зростанням елементами об'єднання спектрів другої та третьої задач.

В цьому розділі знайдені необхідні та достатні умови на три послідовності дійсних чисел щоб, вони були спектрами трьох вищезгаданих задач, тобто розв'язана проблема існування розв'язку оберненої задачі. Також доведено єдиність її розв'язку. Описано алгоритм знаходження потенціалу рівняння Штурма-Ліувілля за трьома спектрами вищезгаданих спектральних задач.

В цьому ж розділі описаний винятковий випадок, в якому для знаходження потенціала задачі Штурма-Ліувілля достатньо двох спектрів задач (спектра задачі на всьому інтервалі і спектра задачі на правій половині інтервалу) та одного власного значення задачі на лівій половині інтервалу. Цей випадок є аналогом теореми Амбарцумяна у класичній теорії оберненої задачі Штурма-Ліувілля на скінченному інтервалі.

У четвертому розділі розглянута задача відновлення форми графів, за допомогою спектри задач Штурма-Ліувілля на простих зв'язних рівнобічних графах зі стандартними умовами у вершинах.

При розгляді використовується зв'язок між спектрами задач Штурма-Ліувілля на рівнобічних графах і спектрами нормованих лапласіанів відповідних комбінаторних графів, котрий був знайдений у роботі von Below для задач з умовами Неймана на висячих вершинах і у монографії M. Moller, V. Pivovarchik для випадку умов Діріхлі на висячих вершинах.

З аналізу асимптотики спектрів задач Штурма-Ліувілля випливає, що перший та другий члени цієї асимптотики цілком визначаються формою простого зв'язного рівнобічного графа, а потенціали на ребрах впливають тільки на третій і подальші члени цієї асимптотики.

Доведено що серед простих зв'язних рівнобічних графів з кількістю вершин, що не перевищує п'яти, немає коспектральних. Доведено також, що серед рівнобічних дерев немає коспектральних, якщо кількість вершин не

перевищує восьми.

У п'ятому розділі розглянута задача Штурма-Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному графі зі стандартними умовами у внутрішніх вершинах і умовами Діріхле у висячих вершинах.

В цьому розділі наведені приклади, в яких спектр задачі Штурма-Ліувілля однозначно визначає форму графа, а також приклади, в яких не визначає, тобто знайдені коспектральні графи. Так у випадку графа подвійна зірка доведено єдиність розв'язку оберненої задачі.

Для випадку графа гусеничне дерево наведено приклад, в якому розв'язок оберненої задачі єдиний, а також приклад, в якому він не єдиний, тобто існують коспектральні гусеничні дерева.

Аналогічний результат отриманий також у випадку графа декорованого трикутника.

### **Наукова новизна одержаних результатів.**

Дисертаційна робота містить низку нових результатів, які становлять суттєве доповнення до відомих результатів.

Так задача про три спектри раніш була розглянута за умов Діріхле на кінцях цього інтервалу і умови Діріхле в центрі інтервалу, а в дисертаційній роботі вона розглянута з іншими умовами.

Результати про відсутність коспектральних простих рівнобічних зв'язних графів з кількістю вершин, що не перевищує 5 та відсутність коспектральних рівнобічних дерев з кількістю вершин, що не перевищує 8, є цілком новими.

Приклади коспектральних графів у задачі з умовами Діріхле на висячих вершинах, наведені у п'ятому розділі, є піонерською роботою, котра буде мати продовження.

### **Повнота викладу результатів дослідження в опублікованих працях**

Основні теоретичні положення та висновки дисертаційного дослідження опубліковані А. А. Райлян у п'яти наукових працях, серед яких одна у міжнародному виданні, що входить до наукометричної бази Scopus з

квартилем Q1, одна у міжнародному виданні, що входить до наукометричної бази Scopus з кварталем Q2, одна у фаховому виданні України, переклад якого на англійську мову входить до наукометричної бази Scopus з кварталем Q3. Дві наукові праці вийшли в тезах міжнародних конференцій.

Апробація результатів дисертаційного дослідження проводилася на двох наукових міжнародних конференціях та на міжнародному науковому семінарі.

### **Практичне значення результатів дослідження**

Висновки дисертації мають науково-теоретичне та практичне значення, та можуть бути використані у науково-дослідній діяльності для подальшого вивчення порушеної проблематики. Результати дисертаційного дослідження можуть бути рекомендовані до використання при читанні спеціальних курсів, а також наукових дослідженнях у галузі математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь, теорії квантових графів.

Результати дисертаційного дослідження можуть бути використані у синтезі електричних ланцюгів, а також у дизайні квантових мікросхем.

**Дискусійні питання та зауваження.** Позитивно оцінюючи, в цілому, досягнуті А. А. Райлян теоретичні та практичні результати дослідження, вважаю за необхідне висловити деякі зауваження та побажання:

1. Деякі твердження авторки є вірними, але потребують пояснення, котрі відсутні в тексті дисертації, так означення функції типу синусу у різних джерелах – різні. В деяких джерелах включена умова простоти коренів. В означенні 3.4 в дисертації такої вимоги нема. З іншого боку, у прямій задачі нерівності (3.31) допускають кратність елементів послідовності  $\{\eta_k\}_{-\infty, k \neq 0}^{\infty}$ . Авторка не пояснює, що буде з оберненою задачею якщо у нерівностях (3.35) допустити не строгі нерівності.
2. Є зауваження, яке слід вважати скоріше як побажання для подальших досліджень. В дисертації розглянуті випадки, в яких на всіх висячих вершинах накладені умови Неймана та задачі, в яких на всі вершини накладені умови Діріхле, але не розглянуто жодного прикладу, в якому

на деяких вершинах накладені умови Неймана, а на інших умови Діріхле.

3. В дисертаційній роботі є ряд стилістичних і граматичних помилок, але це не заважає розумінню сенсу. Тому не наводимо список цих помилок.

### **Загальний висновок.**

Дисертаційна робота «Обернена задача знаходження форми графу та узагальнення теореми Амбарцумяна», написана чітко, кожне твердження має ґрунтовне доведення. Публікації містять основні твердження дисертації. Рівень дисертації високий. Вважаю, що дисертація відповідає вимогам які пред'являються до дисертації на здобуття наукового рівня доктора філософії (111 Математика), а Райлян Анастасія Андріївна заслуговує присудження ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика.

У тексті не виявлено ознак плагіату, самоплагіату, фальсифікації.

Дисертаційна робота А. А. Райлян відповідає чинним вимогам п. п. 6, 7, 8, 11 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженому Постановою Кабінету Міністрів України від 14 січня 2022 року № 44, а її автор А. А. Райлян заслуговує на присудження ступеня доктора філософії зі спеціальності 111 «Математика».

### **Офіційний опонент**

доктор фізико-математичних наук,

провідний науковий співробітник

Фізико-технічного інституту низьких температур

ім. Б.І. Веркіна НАН України

\_\_\_\_\_Володимир ЗОЛОТАРЬОВ